Основные задания по математике, рассмотренные в рамках консультаций для обучающихся предуниверситетской сетевой школы

№1

Условие задачи

а) Решите уравнение $cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = cos2x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Решение

а) $cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = cos2x.$

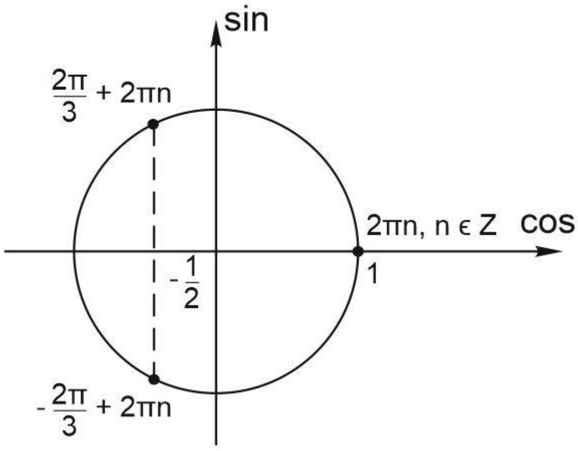
По формулам для косинуса двойного угла имеем

$cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = cosx$, а $cos2x = 2cos^2x - 1$, и уравнение принимает вид $cosx = 2cos^2x - 1,\ 2cos^2x - cosx - 1 = 0.$

Замена $cosx = t$ приводит к уравнению

Рисуем тригонометрический круг и отмечаем точки,

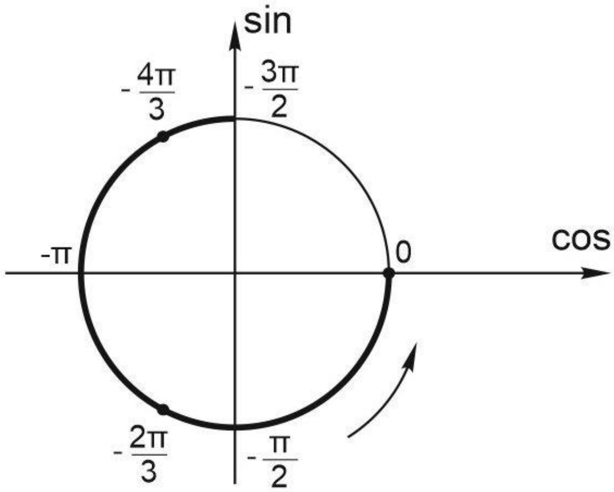
где $cosx = 1$ или $cosx = -\frac{1}{2}.$



Получаем $x = 2\pi n,\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

б) Отметим на тригонометрическом круге отрезок $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$ и найденные серии решений.

Видим, что отрезку принадлежат точки $0;-\frac{2\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{4\pi}{3}.$



Ответ:

а) $x=2\pi n,\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$

б) $-\frac{4\pi}{3};-\frac{2\pi}{3};0.$

№2

Условие задачи

Решите неравенство

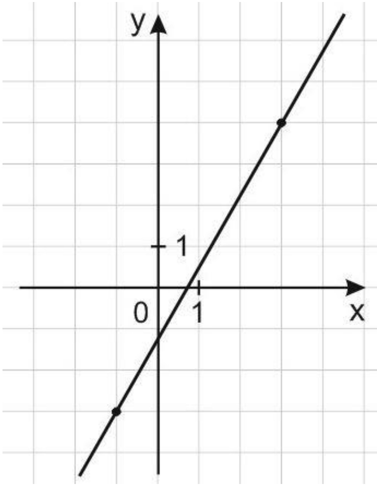
$$log_2{(x+1)}^2\cdot log_{\frac{1}{3}}x^2-4log_2{(x+1)}+4log_3{(-x)}+4\le 0.$$

Ответ:

$x\in\left[-\frac{1}{3};0\right).$

Цикл заданий №3

1. На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -13,5$.



Решение:

Найдем, чему равны k и b. График функции проходит через точки (3; 4) и (-1; -3). Подставив по очереди координаты этих точек в уравнение прямой y = kx + b, получим систему:

$$\begin{cases} 3k + b = 4 \\ -k + b = -3 \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе:

Уравнение прямой имеет вид:

$$y = \frac{7}{4}x - \frac{5}{4}.$$

Найдем, при каком x значение функции равно -13,5.

$$\frac{7}{4}x - \frac{5}{4} = -13,5;$$

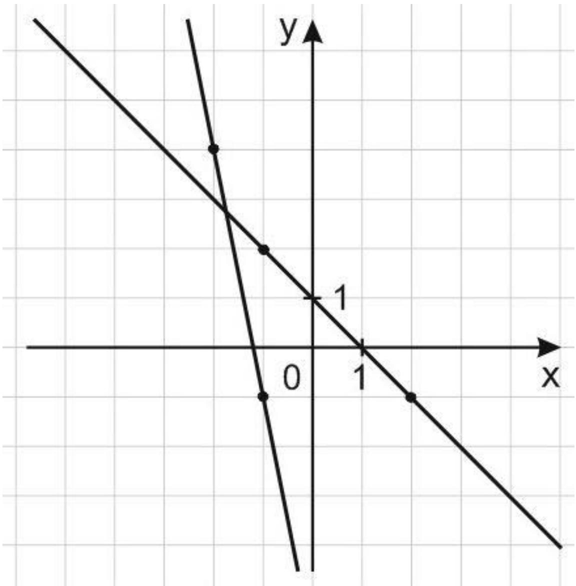
$$7x - 5 = -54;$$

$$7x = -49;$$

$$x = -7.$$

Ответ: -7.

2. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



Решение:

Запишем формулы функций.

Одна из них проходит через точку (0; 1) и ее угловой коэффициент равен -1. Это линейная функция $y = -x + 1$.

Другая проходит через точки (-1; -1) и (-2; 4). Подставим по очереди координаты этих точек в формулу линейной функции $y = kx + b$.

$$\begin{cases} -k + b = -1 \\ -2k + b = 4 \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе.

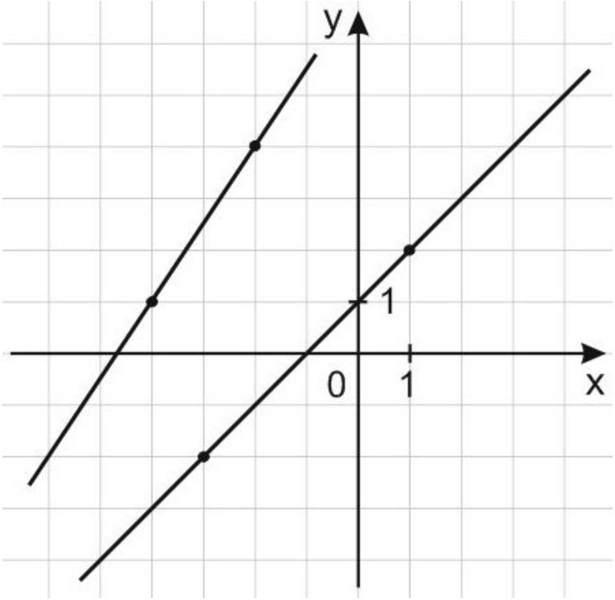
$k = -5$; тогда $b = -6$.

Прямая задается формулой: $y = -5x - 6$.

Найдем абсциссу точки пересечения прямых. Эта точка лежит на обеих прямых, поэтому:

Ответ: -1,75.

3. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



Решение:

Прямая, расположенная на рисунке ниже, задается формулой $y = x + 1$, так как ее угловой коэффициент равен 1 и она проходит через точку (-3; -2).

Для прямой, расположенной выше, угловой коэффициент равен $\frac{3}{2} = 1,5.$

Эта прямая проходит через точку (-2; 4), поэтому: $1,5 \cdot (-2) + b = 4; b = 7,$ эта прямая задается формулой $y = 1,5x + 7.$

Для точки пересечения прямых:

$x + 1 = 1,5x + 7;$

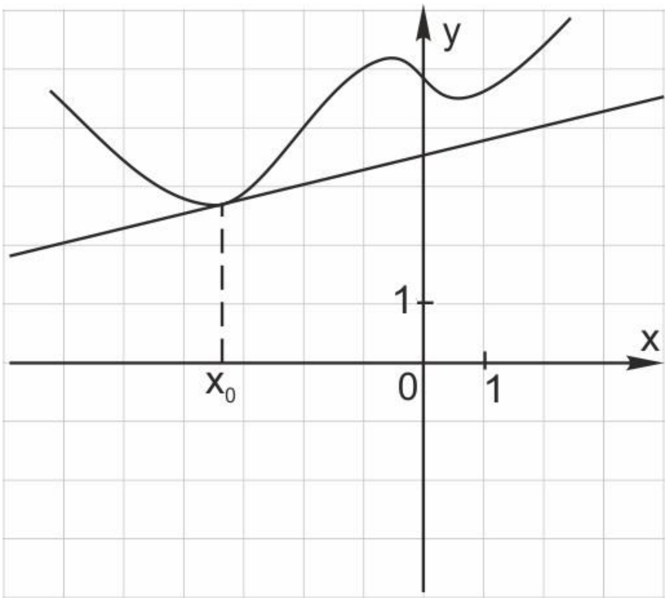
$0,5x = -6;$

$x = -12.$

Ответ: -12.

Цикл заданий №4

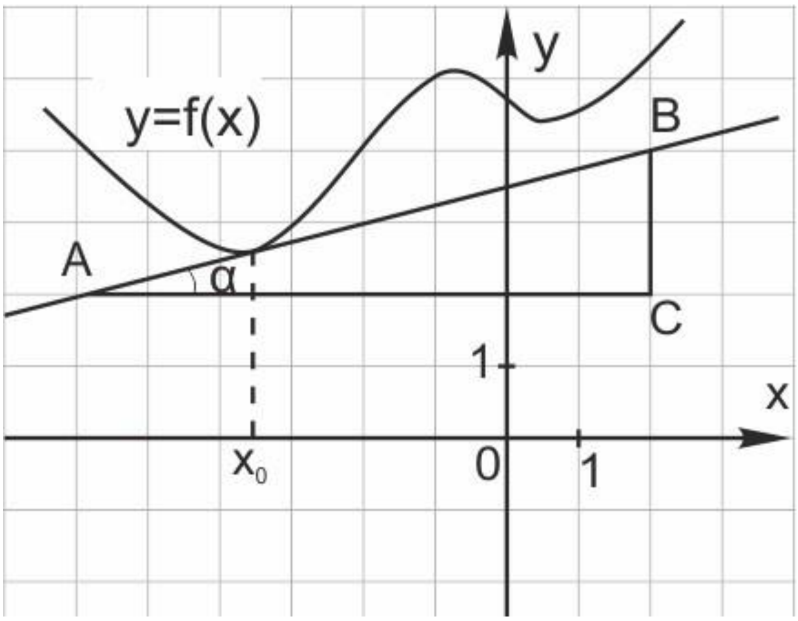
1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ *и касательная к нему в точке с абсциссой* x_0. *Найдите значение производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0.



Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной в точке x_0.

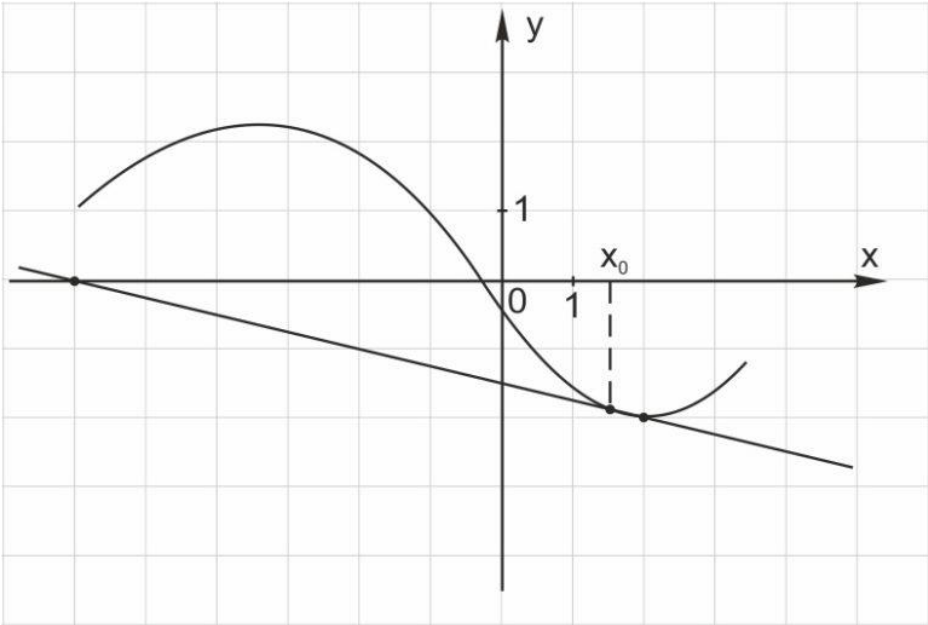
Достроив до прямоугольного треугольника ABC, получим:

$f'(x_0) = tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{8} = 0,25.$



Ответ: 0,25.

2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.
Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



Начнём с определения знака производной. Мы видим, что в точке x_0 функция убывает, следовательно, её производная отрицательна. Касательная в точке x_0 образует тупой угол α с положительным направлением оси X. Поэтому из прямоугольного треугольника мы найдём тангенс угла φ, смежного с углом α.

Мы помним, что тангенс угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему: $tg\varphi = 0,25$. Поскольку $\alpha + \varphi = 180°$, имеем:

$$tg\alpha = tg(180° - \varphi) = -tg\varphi = -0,25.$$

Ответ: −0, 25.

Касательная к графику функции

3. Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$.

Найдите абсциссу точки касания.

Запишем условие касания функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ в точке x_0.

При $x = x_0$ значения выражений $f(x)$ и $kx + b$ равны.

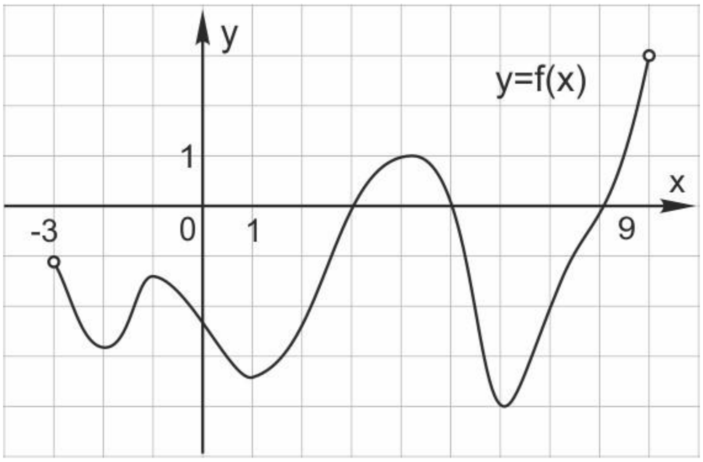
При этом производная функции $f(x)$ равна угловому коэффициенту касательной, то есть k.

$$\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases};$$

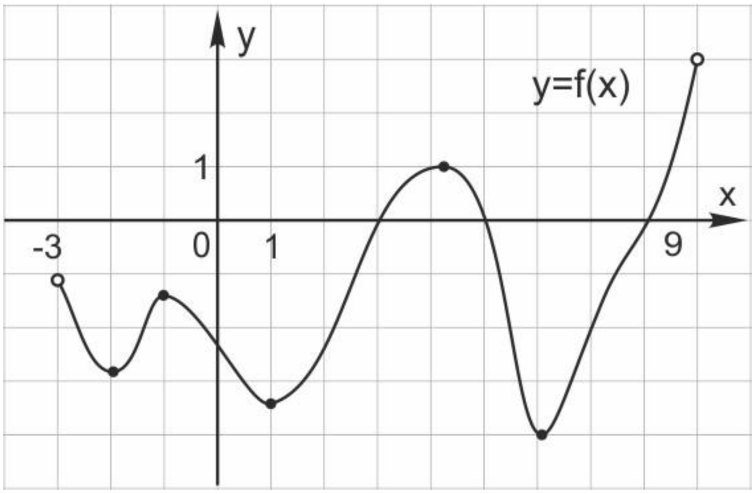
$$\begin{cases} x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \\ 3x^2 + 14x + 7 = -4 \end{cases}.$$

Из второго уравнения находим $x = -1$ или $x = -\frac{11}{3}$. Первому уравнению удовлетворяет только $x = -1$.

5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Производная функции $f'(x) = 0$ в точках максимума и минимума функции $f(x)$. Таких точек на графике 5.



Ответ: 5.